Istituto nazionale per la valutazione del sistema educativo di istruzione e di formazione

WORKING PAPER N. 41/2019

Un'analisi longitudinale dei dati INVALSI di matematica di una stessa coorte alla scuola primaria

Monica Panero – INVALSI, Assegnista di ricerca

Collana: Working Papers INVALSI

ISSN: 2611 - 5719

Abstract

Questo working paper[1] propone i primi risultati di uno studio longitudinale in corso sui dati INVALSI di matematica di una stessa coorte di allievi alla scuola primaria. L'obiettivo di questo lavoro è studiare l'evoluzione delle competenze matematiche degli allievi, definita e misurata come un cambiamento di livello di abilità tra due gradi successivi, nello specifico il grado 2 (classe seconda) e il grado 5 (classe quinta). Si presenta la metodologia seguita per costruire e analizzare il dataset a due livelli di profondità: il primo mirato a studiare come si distribuisce la differenza di livello di abilità tra gli studenti del campione; il secondo volto ad analizzare le performance (intese come percentuali di risposte corrette) degli allievi su coppie di item simili per contenuto, per la struttura del problema e/o la struttura del processo risolutivo. Seguono, infine, i primi risultati sulla coorte degli allievi nati nel 2004, che hanno svolto la prova di seconda nel 2012 e quella di quinta nel 2015, e ulteriori sviluppi dello studio che sono già in corso o da implementare in futuro.

[1] Una parte di questo studio è stata presentata e discussa in occasione del secondo seminario "I dati INVALSI: uno strumento per la ricerca", tenutosi a Firenze dal 17 al 18 novembre 2017.

Introduzione

Recenti studi longitudinali condotti sulle prove INVALSI di Matematica (Branchetti et al., 2015) hanno mostrato la valenza di tali test come strumento per seguire l'evoluzione delle competenze degli studenti negli anni. Inoltre, l'analisi mirata delle informazioni ricavate dalle prove può incentivare e guidare la realizzazione di attività didattiche nelle scuole come dimostrato nel contesto della formazione docenti (Martignone, 2016).

Le prove INVALSI testano, con affinamenti successivi nei diversi gradi scolastici, il raggiungimento dei traguardi per lo sviluppo delle competenze promossi dalle Indicazioni Nazionali per il curricolo. Pertanto, un'analisi longitudinale dei risultati di una stessa coorte ci può permettere di ricavare informazioni sullo sviluppo delle competenze degli studenti.

In particolare, l'obiettivo di questo lavoro è studiare l'evoluzione delle competenze matematiche degli allievi alla scuola primaria. Ci concentriamo sulla scuola primaria in quanto, grazie alle rilevazioni INVALSI, abbiamo accesso a due misurazioni in momenti distinti (classe seconda e classe quinta) della stessa variabile latente: l'abilità in matematica. Nella sua globalità, questa abilità oggetto di misurazione corrisponde ai traguardi di sviluppo delle competenze che sono gli stessi per la classe seconda e per la classe quinta. Ovviamente in seconda tali competenze matematiche si ritengono in corso di acquisizione, ma possiamo supporre che i livelli di abilità (vedi Rapporto Nazionale 2017), che descrivono il grado con cui le abilità matematiche sono possedute, possano essere acquisiti gradualmente e mutare nel corso della scuola primaria. L'evoluzione delle competenze degli allievi sarà quindi misurata, e definita in questo working paper, come un cambiamento di livello di abilità tra due gradi successivi, nello specifico il grado 2 (classe seconda) e il grado 5 (classe quinta). Stiamo ipotizzando dunque che i due test condividano una stessa scala declinata in cinque livelli di abilità. Questa ipotesi è fatta a priori sulla base del Quadro di riferimento INVALSI e il suo legame con le Indicazioni Nazionali, ma non può essere verificata su item comuni alle due prove. Mentre in un design di linking longitudinale la scala comune a due (o più) misurazioni in momenti distinti viene definita basandosi su item comuni alle due (o più) prove (Rock, Pollack & Weiss 2004; von Davier, Carstensen & von Davier 2006), nel nostro caso, le prove non sono state predisposte a priori per uno studio longitudinale, quindi non contengono item comuni. Le domande infatti sono declinate secondo gli obiettivi di apprendimento (e dunque i contenuti) fissati per il termine della classe terza (prova di seconda) e per il termine della classe quinta (prova di quinta). Poiché non si tratta dello stesso strumento di misurazione, anche se si misura lo stesso costrutto e i soggetti sono gli stessi in seconda e in quinta, occorrerà procedere con molta cautela nel comparare le performance degli allievi, ossia le loro percentuali di risposte esatte. Questo confronto sarà fatto solo su item che si considerano, per una serie di criteri che definiremo in seguito, sufficientemente simili. Per trovare queste somiglianze, ci viene in aiuto il fatto che il curricolo sia scritto in continuità sul percorso della primaria e vi sono dei quesiti che condividono lo stesso contenuto matematico o risolubili attivando processi analoghi. Concetti come la divisione, la simmetria, la probabilità, che sono prerogative del programma di quinta, sono spesso già indagati in seconda. La prova di seconda dunque valuta la formazione di un terreno fertile per una costruzione matura del concetto nel successivo triennio. Proprio su questi concetti fondanti cercheremo item simili e confronteremo le performance degli allievi.

Livelli di abilità in matematica per la scuola primaria

Trasversalmente ai contenuti e agli ambiti in generale, i livelli di abilità in matematica sono definiti in termini di:

- Caratteristiche della situazione problematica che lo studente è in grado di risolvere.
- Profondità della conoscenza delle nozioni matematiche del programma di quinta e padronanza delle rappresentazioni degli oggetti matematici studiati.
- Capacità argomentative dello studente.

Nella Tabella 1 proponiamo, dunque, una lettura dei livelli di abilità declinati lungo le tre dimensioni *Conoscere*, *Risolvere problemi* e *Argomentare*.

	Conoscere	**Risolvere problemi**	**Argomentare**
Livello 1	Possiede conoscenze elementari, abilità di base (spesso acquisite nel grado scolastico precedente)	Sa risolvere situazioni scolastiche standard	
Livello 2	Conosce le nozioni matematiche più importanti; sa utilizzare le rappresentazioni standard degli oggetti studiati	Sa risolvere situazioni di routine con collegamento diretto tra stimolo e domanda, usando algoritmi e procedure di base; sa ricavare informazioni da grafici e tabelle	
Livello 3	Ha una certa consapevolezza nelle abilità di base ed è in grado di fare collegamenti tra conoscenze fondamentali; sa riconoscere rappresentazioni diverse dello stesso oggetto matematico	Sa rispondere a domande che richiedono semplici inferenze a uno o più passi risolutivi; sa rappresentare informazioni	È in grado di esplicitare dei passaggi eseguiti
Livello 4	Ha consapevolezza nelle abilità di base e conoscenze precise, non possiede misconcezioni; padroneggia le diverse rappresentazioni degli oggetti matematici studiati	Sa risolvere problemi in contesti anche non familiari, dove le informazioni non sono esplicitamente collegate alle richieste	È in grado di giustificare il proprio percorso risolutivo
Livello 5	Padroneggia gli aspetti concettuali e procedurali; sa utilizzare diverse rappresentazioni di un oggetto matematico e sa passare con sicurezza da una all'altra	Sa risolvere situazioni non standard, dove è necessario costruirsi un modello adeguato per rispondere e un'idea risolutiva originale (non scolastica)	È in grado di giustificare la propria strategia e di riconoscere tra diverse argomentazioni quella corretta

Tabella 1 – I cinque livelli di abilità in matematica per la scuola primaria (nostra rielaborazione).

Lo studente che si colloca al limite inferiore di un livello ha il 62% di probabilità di superare l'item più facile di tale livello e, nel caso dei livelli a intervallo chiuso (livelli 1, 2, 3 e 4), mediamente circa il 50% di probabilità di superare gli item del livello cui è stato assegnato e il 42% di probabilità di superare l'item più difficile di tale livello (quest'ultima condizione non vale per il livello 5, dato che non vi è un limite superiore).

Strumenti teorici

Passiamo ora a introdurre gli strumenti teorici di cui ci serviamo per l'analisi degli item delle due prove svolte da una stessa coorte in seconda e in quinta primaria, alla ricerca di eventuali item simili e dei criteri per stabilire tale somiglianza.

Innanzitutto, ciascun item fa riferimento a un ambito prevalente (Numeri, Spazio e Figure, Dati e Previsioni, Relazioni e Funzioni) e tra gli item che afferiscono allo stesso ambito possiamo distinguere quelli che coinvolgono lo stesso concetto. Intendiamo un concetto secondo la definizione di Vergnaud (1990), ossia la terna costituita da tre componenti interconnesse:

- l'insieme delle situazioni che danno senso al concetto;
- l'insieme degli invarianti sui quali si basa l'operatività degli schemi, definiti da Vergnaud come organizzazioni invarianti del comportamento per una classe di situazioni date;
- l'insieme delle forme linguistiche e non linguistiche che permettono di rappresentare simbolicamente il concetto, le sue procedure, le situazioni e le procedure di trattazione.

Tra gli item che coinvolgono uno stesso concetto, anche se a livelli di profondità differenti, ci potrà essere una somiglianza sul piano della situazione, sul piano degli invarianti operatori o ancora sul piano della forma linguistica in cui è espresso. Ad esempio, due quesiti che coinvolgono il concetto di divisione in seconda e in quinta potranno basarsi sullo stesso senso della divisione (es. una situazione di contenenza) oppure implicare lo stesso schema (es. il raggruppamento di uno schieramento di oggetti) oppure focalizzarsi sulla stessa rappresentazione (es. parole e simboli che evocano il concetto di divisione). Parleremo in questo caso di **somiglianza concettuale** tra i due item.

In secondo luogo, ci interessiamo al tipo di problema proposto dall'item. Riferendoci a Borasi (1984) possiamo individuare le seguenti componenti in un problema.

1) La formulazione, che permette di approcciarsi al problema, ossia tutto ciò che fornisce indicazioni sul compito da svolgere, sugli obiettivi che si vogliono raggiungere. Così la formulazione può essere esplicitata nel testo sotto forma di domande a cui rispondere, di consegne da eseguire, ma può anche non essere esplicitata direttamente ed essere demandata al solutore.

2) Il contesto, ossia “tutto ciò che nel testo viene espresso esplicitamente o implicitamente, allo scopo di inquadrare il problema, e che provvede le varie informazioni necessarie a risolverlo” (Borasi, 1984, p. 86). Fanno dunque parte del contesto i dati del problema, tutte le informazioni fornite espressamente dal testo e anche elementi impliciti evocati dalla situazione. A proposito del contesto di un problema matematico, Zan (2012) sottolinea la necessità che la domanda (formulazione del problema, vedi punto 1) sia formulata *nel* contesto, che nasca naturalmente da esso.

3) L’insieme delle soluzioni di un problema può dare luogo a diverse tipologie di problema:

- Problemi che ammettono una e una sola soluzione.
- Problemi che ammettono più soluzioni, anche infinite.
- Problemi che non ammettono soluzioni.

Osserviamo a questo proposito che i quesiti delle prove INVALSI sono in gran parte del primo tipo per necessità relative alla correzione. Tuttavia, vi sono talvolta quesiti che indagano la capacità dell’allievo di riconoscere una situazione impossibile (proponendo la scelta “Non si può dire”) o item in cui si accettano due (o più) risposte, entrambe segnalate per la correzione e nella guida alla lettura.

Queste prime tre componenti sono di natura statica e sono predisposte dai quesiti delle prove INVALSI: l’allievo non può intervenire su di esse. A seconda delle modalità con cui è formulata la domanda[1], del tipo di contesto, della natura dell’insieme delle soluzioni e della relazione tra queste tre componenti, parleremo di somiglianza strutturale del problema.

Vi è poi una quarta componente nel quadro di Borasi (1984) costituita dalle diverse strategie che si possono mettere in campo per risolvere il problema. Questo elemento è stato ripreso da Boero (1986), nell’ambito dei problemi aritmetici, che ne ha evidenziato la dinamicità rispetto alle altre componenti: l’attività dell’allievo è tutta concentrata su questa componente. Boero distingue diverse azioni del solutore, tra cui riportiamo quelle coinvolte nelle prove INVALSI: comprensione del testo, risoluzione, controllo delle soluzioni. Occorre pertanto analizzare a priori l’attività matematica attesa dall’allievo, per la quale ci riferiamo a due aspetti (dinamici) che vengono dalla ricerca in didattica della matematica:

- Strumento/oggetto (Douady, 1986): l’attività richiesta verte su un concetto o una proprietà in quanto tale (oggetto) o sull’uso di essa per risolvere il problema dato (strumento)?
- Registri (Duval, 1993): Quali registri deve utilizzare l’allievo per esprimere/giungere alla risposta? La risoluzione del quesito richiede all’allievo un cambiamento di registro rispetto a quello della domanda?

[1] Nella formulazione della domanda rientra anche il tipo di domanda: a risposta univoca, cloze o a risposta multipla.

L’analisi dell’attività matematica attesa dall’allievo per rispondere all’item ci consente di individuare **somiglianze strutturali del processo risolutivo**.

Riassumendo, i criteri per la selezione di item simili tra la prova di seconda e quella di quinta si basano su una (o più) di queste somiglianze:

- somiglianza concettuale;
- somiglianza strutturale del problema;
- somiglianza strutturale del processo risolutivo.

Metodologia

Il primo passo dello studio consiste nell’individuare le coorti da esaminare, le relative prove di seconda e di quinta svolte e comporre il dataset contenente le informazioni contestuali e i risultati di ciascun soggetto in entrambe le prove, item per item. Leggendo il dataset riga per riga si ha la possibilità di seguire i dati e le risposte di ciascun studente (0=errata; 1=corretta) mentre leggendolo colonna per colonna si può percepire l’andamento delle risposte ad ogni singolo item.

Le coorti interessate da questo studio longitudinale sono, per ora, gli studenti nati nel 2004 (“coorte 2004” in seguito), che hanno svolto la prova di seconda nel 2012 e quella di quinta nel 2015, e gli studenti nati nel 2005 (“coorte 2005” in seguito), che hanno svolto la prova di seconda nel 2013 e quella di quinta nel 2016. Poiché gli studenti non hanno conservato lo stesso codice da una prova all’altra e non vi era la possibilità di accedere ai codici SIDI degli studenti, il dataset per ciascuna coorte è stato creato selezionando le classi facenti parte del campione nazionale in entrambe le rilevazioni (ad esempio per la coorte 2004, sono state selezionate solo le classi appartenenti sia al campione di seconda del 2012 sia al campione di quinta del 2015). I dati sono poi stati controllati per assicurarsi di selezionare solamente i soggetti che per dati contestuali (sesso, mese e anno di nascita, etc.) e posizione nell’elenco alfabetico della classe si possono ritenere, con ragionevole certezza, gli stessi soggetti.

Una volta preparato il dataset di una coorte su due prove successive, si procede con un primo livello di analisi: l’individuazione del livello di abilità di ogni studente in seconda e in quinta e il calcolo della relativa differenza (livello di abilità in quinta meno livello di abilità in seconda). Si studia quindi la distribuzione della variabile differenza di livello di abilità sul campione e l’eventuale rilevanza delle variabili genere e macro-area geografica. Inoltre, è possibile aggregare i dati in sottogruppi, a seconda della differenza di livello riscontrata (Tabella 2), distinguendo al loro interno i diversi casi: ad esempio, nel sottogruppo Diff-2, saranno diverse le situazioni degli allievi che sono passati dal livello 3 al livello 1 rispetto a quelle degli allievi che sono passati dal livello 5 al livello 3.

Differenza di livelli di abilità	Livello II → Livello V				
Diff-2 (decrescita)	3→1	4→2	5→3		
Diff-1 (decrescita)	2→1	3→2	4→3	5→4	
Diff0 (stabilità)	1→1	2→2	3→3	4→4	5→5
Diff1 (crescita)		1→2	2→3	3→4	4→5
Diff2 (crescita)			1→3	2→4	3→5

Tabella 2 – Diversi casi di crescita, decrescita o stabilità usando i cinque livelli di abilità.

Lo studio quantitativo su ogni coorte prosegue con un secondo livello di analisi per andare più in profondità nello studio dell'evoluzione delle competenze matematiche degli studenti intesa come cambiamento di livello di abilità. Si analizzano in modo qualitativo le prove di seconda e di quinta svolte da una stessa coorte, usando gli strumenti teorici introdotti nella sezione precedente. L'obiettivo di questo secondo livello di analisi è individuare item simili nelle due prove successive per una stessa coorte. Si tratta di item che, pur con difficoltà oggettive differenti perché rapportate al grado scolastico a cui sono proposti, presentano una somiglianza concettuale e/o una somiglianza strutturale del problema e/o una somiglianza strutturale del processo risolutivo. Due item simili mirano a valutare le competenze acquisite al termine della scuola primaria lavorando in continuità su contenuti e processi già a partire dal primo biennio.
Le domande che guidano l'analisi sono le seguenti.

- Sulle coppie di item simili, il campione individuato si comporta come il campione nazionale?
- Ci aspettiamo che le performance (intese come le percentuali di risposte corrette) degli studenti che sono globalmente "scesi" di livello dalla seconda alla quinta siano peggiorate su coppie di item simili; viceversa che le performance degli studenti che sono globalmente "saliti" di livello dalla seconda alla quinta siano migliorate su coppie di item simili. È sempre vero? Si riscontrano casi in controtendenza?

Questo livello di analisi dei dati ci permetterà infine di formulare ipotesi da testare ulteriormente riguardo la crescita o la decrescita delle abilità degli studenti su particolari contenuti, processi o tipi di problema.

Primo livello di analisi

In questa sezione si riportano i risultati relativi alla coorte 2004 e alla coorte 2005. Ulteriori analisi longitudinali dello stesso tipo su altre coorti potranno confermarlo, ma possiamo ipotizzare di aver individuato un andamento standard nell'evoluzione dei livelli di abilità in matematica degli studenti della scuola primaria.

Coorte 2004

Il dataset per la coorte 2004 è composto da 1187 studenti, distribuiti quasi omogeneamente nelle macro-aree geografiche (Fig. 1) e rappresentativo dal punto di vista del genere (Fig. 2).

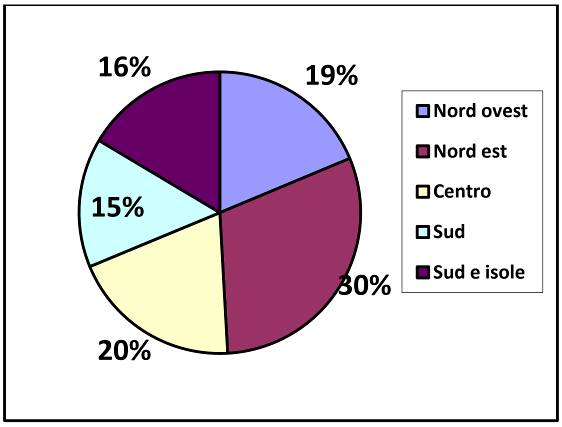


Figura 1 – Composizione del campione della coorte 2004 rispetto alle macro-aree geografiche

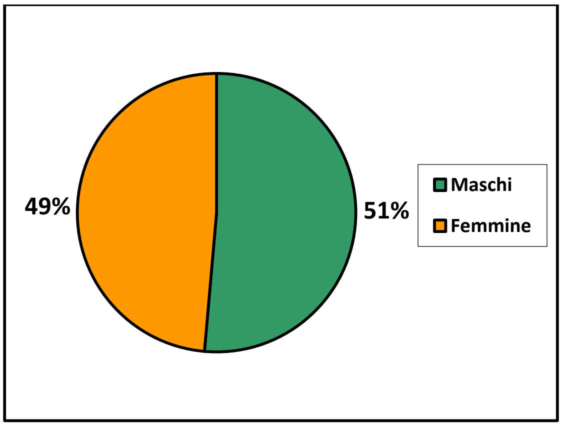


Figura 2 – Composizione del campione della coorte 2004 rispetto al genere

Per descrivere l'andamento dei livelli di abilità degli studenti di questa coorte riprendiamo la Tabella 2 aggiungendo in *corsivo* le percentuali rispetto al campione (prima colonna) e rispetto al gruppo di appartenenza per differenza di livello (Tabella 3). Rappresentiamo infine la situazione nell'istogramma in Figura 3.

Differenza di livelli di abilità	**Livello II → Livello V**				
Diff-2 (decrescita) *8%*	3→1 (*49%*)	4→2 (*33%*)	5→3 (*18%*)		
Diff-1 (decrescita) *22%*	2→1 (*26%*)	3→2 (*28%*)	4→3 (*33%*)	5→4 (*13%*)	
Diff0 (stabilità) *39%*	1→1 (*15%*)	2→2 (*21%*)	3→3 (*26%*)	4→4 (*22%*)	5→5 (*16%*)
Diff1 (crescita) *22%*		1→2 (*20%*)	2→3 (*32%*)	3→4 (*25%*)	4→5 (*23%*)
Diff2 (crescita) *7%*			1→3 (*21%*)	2→4 (*35%*)	3→5 (*44%*)

Tabella 3 – Andamento dei livelli di abilità della coorte 2004[1]

[1] Il restante 2% del campione (ossia 36 studenti su 1187) sono nelle code: rappresentano casi talmente rari di cambiamento di 3 o addirittura di 4 livelli di abilità che non sono stati presi in considerazione nello studio in quanto molto probabilmente dovuti a qualche fattore esterno intervenuto nella prima o nella seconda misurazione.

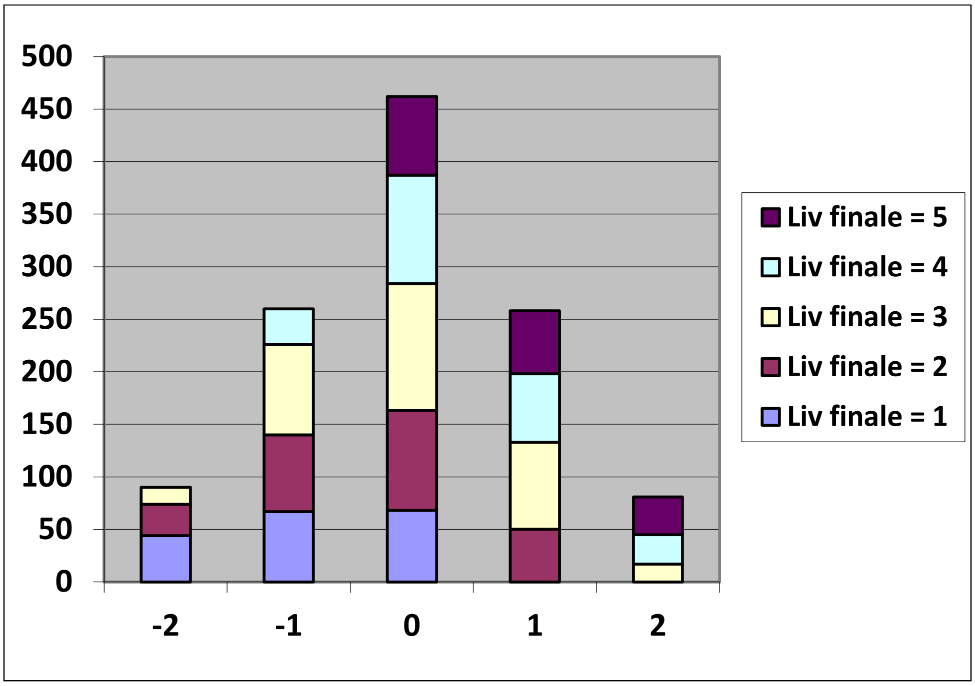


Figura 3 – Composizione del campione della coorte 2004, in base al livello raggiunto in quinta

Coorte 2005

Il dataset per la coorte 2005 è composto da 1771 studenti, distribuiti quasi omogeneamente nelle macro-aree geografiche (Fig. 4) e rappresentativo dal punto di vista del genere (Fig. 5).

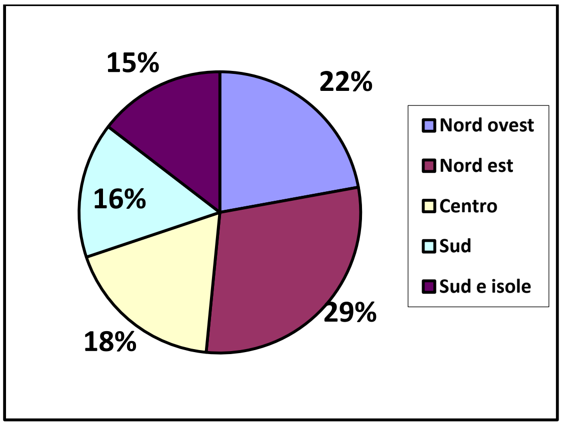


Figura 4 – Composizione del campione della coorte 2005 rispetto alle macro-aree geografiche

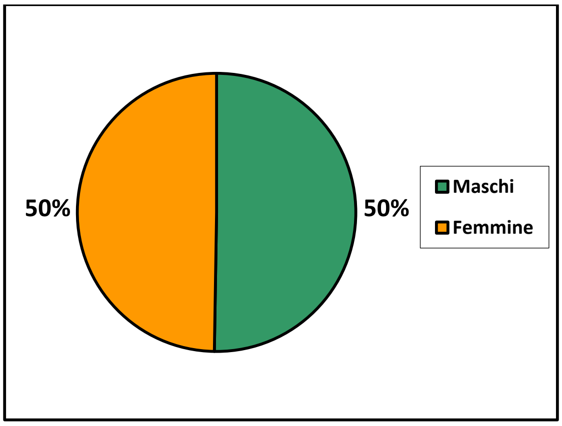


Figura 5 – Composizione del campione della coorte 2005 rispetto al genere

L’andamento dei livelli di abilità per la coorte 2005 è rappresentato nella Tabella 4, in cui sono indicate in *corsivo* le percentuali rispetto al campione (prima colonna) e rispetto al gruppo di appartenenza per differenza di livello e nell’istogramma in Figura 6.

Differenza di livelli di abilità	**Livello II → Livello V**				
Diff-2 (decrescita) *6%*	3→1 (*24%*)	4→2 (*34%*)	5→3 (*43%*)		
Diff-1 (decrescita) *25%*	2→1 (*15%*)	3→2 (*29%*)	4→3 (*32%*)	5→4 (*24%*)	
Diff0 (stabilità) *40%*	1→1 (*8%*)	2→2 (*21%*)	3→3 (*31%*)	4→4 (*18%*)	5→5 (*22%*)
Diff1 (crescita) *21%*		1→2 (*15%*)	2→3 (*31%*)	3→4 (*31%*)	4→5 (*23%*)
Diff2 (crescita) *6%*			1→3 (*35%*)	2→4 (*31%*)	3→5 (*34%*)

Tabella 4 – Andamento dei livelli di abilità della coorte 2005[1]

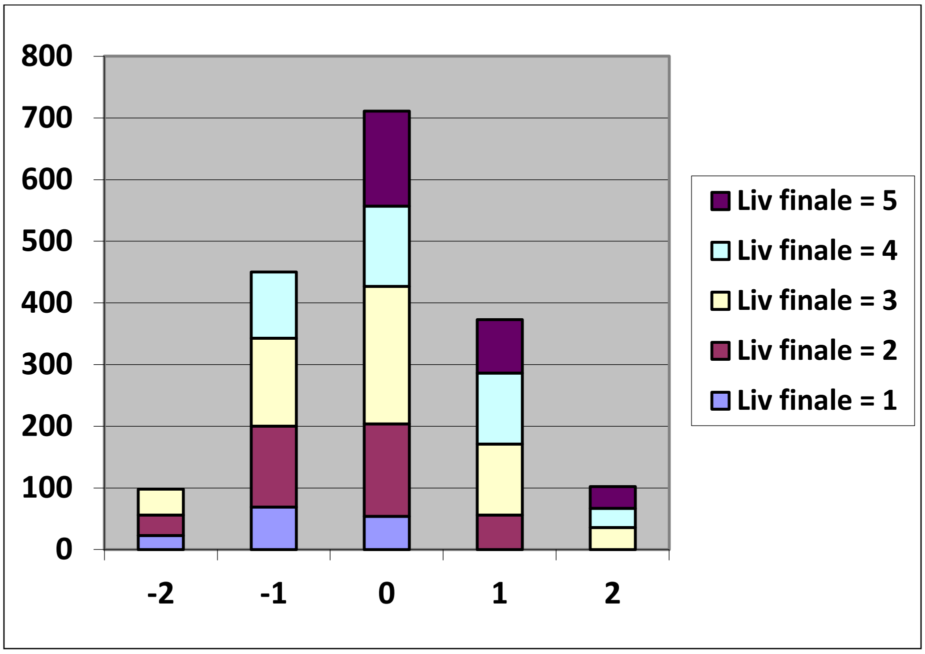


Figura 6 – Composizione del campione della coorte 2005, in base al livello raggiunto in quinta

Osservazioni

La variabile differenza di livello di abilità segue una distribuzione a campana. La maggior parte degli studenti di quinta rimane nel livello che aveva già acquisito in seconda e una gran parte di essi presenta un livello

[1] Il restante 2% del campione (ossia 37 studenti su 1771) sono nelle code e, come nel caso della coorte 2004, non sono stati considerati nell’analisi.

medio di abilità. La situazione è simmetrica per la restante parte del campione: gli studenti che sono scesi di un livello sono in numero pressoché uguale a quelli saliti di uno e, così, gli studenti che sono scesi di due livelli sono in numero pressoché uguale a quelli saliti di due. Non si registrano differenze significative tra maschi e femmine e nemmeno tra le differenti macro-aree geografiche.

Le seguenti tabelle contengono i principali indici per esplorare la distribuzione della nostra variabile differenza di livello. Osserviamo che sono già state eliminate i casi alle code.

Coorte 2004: Descriptive Statistics

	N	Mean	Std. Deviation	Skewness		Kurtosis	
	Statistic	Statistic	Statistic	Statistic	Std. Error	Statistic	Std. Error
Diff_Livelli	1151	-,02	1,022	-,009	,072	-,405	,144
Valid N (listwise)	1151						

Coorte 2005: Descriptive Statistics

	N	Mean	Std. Deviation	Skewness		Kurtosis	
	Statistic	Statistic	Statistic	Statistic	Std. Error	Statistic	Std. Error
Diff_livelli	1734	-,04	,967	,095	,059	-,335	,117
Valid N (listwise)	1734						

Poiché gli indici di asimmetria e di curtosi sono vicino allo zero o comunque non superano lo 0,5 in valore assoluto, è ragionevole supporre che la variabile differenza di livello si distribuisca normalmente con parametri:

- $\mu = -0{,}02$ e $\sigma = 1{,}02$ per la coorte 2004
- $\mu = -0{,}04$ e $\sigma = 0{,}97$ per la coorte 2005.

Questa verifica di normalità, con valori di μ e σ molto vicini a 0 e 1 rispettivamente, ci conferma che stiamo effettivamente misurando una grandezza: quella che noi abbiamo supposto essere l'evoluzione dell'abilità in matematica degli studenti. Ne deduciamo che la nostra definizione di evoluzione di abilità come differenza di livello tra i due gradi scolari possa ritenersi valida.

Secondo livello di analisi: un esempio

Consideriamo la coorte 2004 e confrontiamo le performance degli studenti su due item simili: la domanda D12 della prova di seconda del 2012 e la domanda D17 della prova di quinta del 2015. Utilizzando gli strumenti introdotti nella sezione teorica, proviamo che queste due domande soddisfano i criteri per essere ritenute simili (Tabella 5).

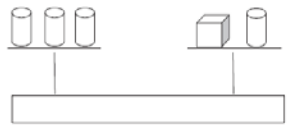
	D12. **Nello schema qui sotto la somma dei numeri in orizzontale deve essere uguale alla somma dei numeri in verticale.**  **Quale numero va scritto nella casella con la stella?** A. ☐ 7 B. ☐ 6 C. ☐ 3	**D17.** **Questa è una bilancia a due piatti in equilibrio.**  **Un cilindro pesa 175 grammi.** **Quanto pesa un cubetto ?** **Scrivi come hai fatto per trovare la risposta e poi riporta sotto il risultato.** .... **Risultato:** .... grammi
	Soluzione: * + 7 + 8 = 7 + 5 + 6 * + 15 = 18 * = 3	Soluzione: 3 cilindri = 1 cubetto + 1 cilindro 2 cilindri = 1 cubetto peso di un cubetto = 2 x 175 = 350 grammi
1	*Concetto*: uguaglianza tra due quantità *Situazione*: uguaglianza tra somme di addendi di cui uno è incognito *Schema*: sfruttare la sottrazione *Rappresentazione*: diagramma che ha la stessa somma su righe e colonne	*Concetto*: uguaglianza tra due quantità *Situazione*: uguaglianza tra somme di addendi di cui uno è incognito *Schema*: sfruttare la sottrazione *Rappresentazione*: disegno di una bilancia in equilibrio
2	*Formulazione*: l'incognita è indicata con una stella al posto dell'addendo mancante e si chiede con quale numero si deve sostituire la stella. La domanda è a risposta multipla (tre opzioni). *Contesto*: la situazione è astratta, basata sui soli numeri; gli addendi sono dati e si precisa che la somma di quelli in orizzontale (tra cui la stellina) deve essere uguale a quella degli addendi tutti noti in orizzontale; un addendo (7) è in comune alle due somme. *Soluzioni*: unica (C).	*Formulazione*: la domanda è formulata riprendendo un elemento del disegno dato (cubetto). La domanda è a risposta univoca per quanto riguarda la soluzione e a risposta aperta per la spiegazione della strategia. *Contesto*: la situazione è concreta, basata sul disegno di una bilancia in equilibrio; gli addendi non sono dati esplicitamente uno di fila all'altro, ma in legenda al disegno: "un cilindro (disegno del cilindro) pesa tot". Non è esplicitato l'uguaglianza tra la somma dei pesi (da dedurre dall'espressione "in equilibrio" e dal disegno). *Soluzioni*: unica (350 grammi).
3	*Strategie attese*: a. Calcola la somma nota sulla colonna (7+5+6=18), sottrae a 18 gli addendi noti sulla riga (18-8-7=3). b. Nota che il 7 è comune ad entrambe le somme, calcola la somma dei numeri restanti sulla colonna (5+6=11), sottrae a 11 l'addendo non comune sulla riga (11-8=3). c. Sostituisce le opzioni fornite dal problema nelle due somme e sceglie quella che gli fa ottenere la stessa somma. *Strumento/oggetto*: il concetto di uguaglianza tra due quantità è strumento per risolvere il problema. *Registri*: l'allievo deve collegare correttamente il diagramma numerico dato con l'informazione espressa in linguaggio naturale sull'uguaglianza delle somme; rimanendo nel registro numerico deve fare i calcoli e scegliere la risposta tra le tre opzioni numeriche date.	*Strategie attese*: Premessa: Interpreta l'informazione "la bilancia è in equilibrio" come uguaglianza dei pesi sui due piatti.) a. Calcola il peso sul piatto di sinistra (175+175+175 o 3x175=525), sottrae il peso noto (cilindro) sul piatto di sinistra (525-175=350). b. Osserva che i due pesi sui piatti della bilancia hanno un cilindro in comune, deduce che un cubetto pesa come due cilindri, calcola il peso del cubetto raddoppiando il peso del cilindro (2x175=350). *Strumento/oggetto*: il concetto di uguaglianza tra due quantità è strumento per risolvere il problema. *Registri*: l'allievo deve interpretare l'espressione in linguaggio naturale "in equilibrio" come un'uguaglianza, deve quindi convertire le informazioni grafiche date nel disegno in numeri, usando correttamente la legenda "un cilindro pesa 175 grammi"; passando quindi al registro numerico deve calcolare il valore corretto del peso incognito.

Tabella 5 – Analisi degli item usando gli strumenti teorici e i criteri introdotti nella sezione teorica.

Le due domande presentate rispettano dunque tutti i criteri per essere ritenuti simili. Vi è infatti somiglianza concettuale (1): il concetto in gioco è l’uguaglianza di due quantità, precursore delle equazioni a una incognita. Seguendo la definizione di Vergnaud (1990), la situazione data e lo schema per affrontarla sono gli stessi, anche se l’immagine del concetto è espressa in forma diversa. Nonostante il contesto diverso, vi è somiglianza strutturale (2): sapendo (in D12) e deducendolo dal contesto (in D17) che due somme sono uguali e dati tutti gli addendi (esplicitamente in D12 e implicitamente in D17) tranne uno, bisogna trovare quello mancante. Osserviamo però che essendo D12 una domanda a risposta multipla, una delle strategie corrette (c) consiste nel sostituire uno per uno i numeri suggeriti dalle opzioni di risposta, scegliendo quello che rende uguali le somme. Questo implica una possibile differenza nell’insieme delle strategie a disposizione dell’allievo. Le altre strategie attese sono esattamente le stesse nei due casi, con la premessa di interpretare correttamente il testo della domanda D17. Il concetto di uguaglianza di due quantità è in entrambi i casi usata come strumento per risolvere il problema, anche se l’item di quinta richiede un cambio di registro (dai registri del disegno e del linguaggio naturale a quello numerico). Possiamo comunque ritenere che vi sia anche una certa somiglianza strutturale del processo risolutivo.

La Tabella 6 riporta le percentuali di risposte corrette a D12 e a D17 ottenute in media per ciascun gruppo e sottogruppo di allievi.

Diff. di livelli di abilità			**Livello II → Livello V**														
	D12	D17		D12	D17		D12	D17		D12	D17		D12	D17		D12	D17
-2 (decr. globale)	62%	41%	3→1	52%	16%	4→2	63%	63%	5→3	88%	69%						
-1 (decr. globale)	55%	48%	2→1	45%	15%	3→2	49%	37%	4→3	53%	67%	5→4	88%	88%			
0 (stab. globale)	51%	57%	1→1	26%	10%	2→2	44%	32%	3→3	50%	64%	4→4	56%	81%	5→5	76%	88%
1 (cresc. globale)	44%	64%				1→2	36%	28%	2→3	48%	51%	3→4	42%	80%	4→5	48%	93%
2 (cresc. globale)	35%	81%							1→3	24%	65%	2→4	39%	79%	3→5	36%	92%
Campione	50%	57%															
Campione naz.le	50%	50%															

Tabella 6 – Percentuali di risposte corrette agli item correlati D12 e D17.

Analizzando i risultati sul campione (N=1187), costituito dagli stessi studenti che hanno svolto la prova di II nel 2012 e quella di quinta nel 2015, ritroviamo il 50% di risposte esatte alla domanda D12 nel 2012 e il 57% di risposte esatte alla domanda D17 nel 2015. Osserviamo, tra parentesi, che questi risultati rispecchiano bene la situazione nazionale (si vedano i risultati del campione nazionale: 50% di risposte esatte a D12 nel 2012; 50% di risposte esatte a D17 nel 2015).

Ci verrebbe da dire che gli alunni si sono comportati pressoché allo stesso modo risolvendo la domanda D12 nel 2012 e D17 nel 2015. Da un'analisi longitudinale più fine del nostro campione possiamo trarre in realtà informazioni più complete e interessanti.

Consideriamo il sottogruppo Diff-2 (8% del campione) costituito dagli studenti che sono globalmente scesi di due livelli di abilità dalla prova di seconda alla prova di quinta. Ci potremmo aspettare che le performance di questi studenti siano più basse su D17 rispetto a D12 ed in effetti la percentuale di risposte corrette per l'intero sottogruppo è scesa in media dal 62% al 41%, ma ciò non accade in maniera omogenea se andiamo ad analizzare caso per caso. In particolare, la media di risposte corrette è rimasta invariata (63%) per gli allievi che partivano con un livello 4 di abilità nel 2012 e sono scesi a livello 2 nel 2015.

Una situazione analoga si è verificata per il sottogruppo Diff-1 (22% del campione) formato dagli studenti che globalmente sono scesi di un livello di abilità dalla prova di seconda alla prova di quinta. Anche qui è utile distinguere le performance nei diversi casi. Infatti, è vero che la percentuale di risposte corrette per l'intero sottogruppo è scesa in media dal 55% al 48%, ma gli studenti di livello medio-alto non contribuiscono a determinare questa tendenza; al contrario, alla domanda D17 le performance sono migliorate in media per coloro che globalmente sono passati dal livello 4 al livello 3 (dal 53% al 67%) e sono rimaste invariate in media per coloro che dal livello 5 sono scesi al livello 4 (88%).

Si registra un miglioramento delle performance di fronte a questo tipo di problema anche per gli studenti che sono rimasti stabilmente in un livello di abilità medio-alto: la percentuale di risposte corrette è aumentata del 14% per gli allievi di livello 3, del 25% per gli allievi di livello 4 e del 12% per gli allievi di livello 5.

Possiamo quindi concludere che per gli allievi di livello medio-alto, anche nei casi in cui le competenze sono globalmente calate, a causare problemi non è stato questo tipo di domanda su cui in molti casi si è registrato un miglioramento delle performance. Il grado di acquisizione del concetto di uguaglianza di due quantità, propedeutico a quello di equazione, e della competenza relativa al suo utilizzo come strumento per risolvere problemi si può considerare abbastanza profondo da parte degli alunni di livello medio-alto (con percentuali in quinta superiori al 60%, in tutti i casi di crescita, decrescita o stabilità di livello).

Non si può dire lo stesso, tuttavia, per gli studenti che globalmente sono saliti di un livello, partendo però da un livello basso (il 4% di studenti che sono passati dal livello 1 al livello 2), la cui performance in media è peggiorata su questo tipo di problema (dal 36% di risposte corrette a D12 nel 2012 al 28% di risposte corrette a D17 nel 2015). Questo ci dice che, sebbene tale domanda possa considerarsi ben acquisita per gli studenti di livello medio-alto, non si può dire altrettanto per gli studenti di livello basso che ancora accusano delle difficoltà, persino nei casi in cui globalmente si è registrata una maturazione delle competenze matematiche.

Osservazioni

Il confronto effettuato tra le performance degli allievi su questi item simili ci sembrano significative perché gli item selezionati presentano lo stesso livello di difficoltà, ovviamente rapportato al grado scolastico per il quale sono proposti. La domanda D12 di seconda ha un indice di difficoltà[1] pari a -0,01, compreso tra -0,4 e 0,4; la domanda D17 di quinta ha un indice di difficoltà pari a -0,26, compreso tra -0,4 e 0,4. Entrambe le domande corrispondono ad un livello 3 di difficoltà. Quindi, possiamo escludere che l'aumento (o la diminuzione) delle percentuali di risposte corrette di uno stesso gruppo di soggetti dipenda dal fatto che D17 fosse in proporzione più facile (o più difficile) di D12. In questo modo, possiamo interpretare un aumento delle percentuali di risposte corrette all'item di quinta rispetto a quello di seconda come un effettivo progresso (o regresso) dell'abilità degli allievi.

Stiamo analizzando altre coppie di item simili e mettendo a punto un metodo per determinare la significatività delle differenze di percentuali rilevate dalla 2^ alla 5^, al fine di trovare i casi di controtendenza più significativi da studiare. Una possibile pista che stiamo esplorando consiste nel basarci sul range di probabilità che un gruppo di studenti di un certo livello di abilità ha di rispondere correttamente agli item considerati. Ciò dovrebbe permetterci non solo di determinare se una controtendenza nei dati percentuali è significativa, ma anche di confrontare le performance degli studenti indipendentemente dal livello di difficoltà degli item.

Infine, faremo delle ulteriori analisi dei dati così aggregati, per stabilire quali variabili (genere, area geografica, etc.) possano aver influito sulle performance di certi gruppi di allievi le cui performance risultano in controtendenza rispetto all'andamento globale della variabile differenza di livello.

Implicazioni didattiche dell'analisi e prospettive dello studio

In termini di implicazioni didattiche, la nostra analisi di primo ma soprattutto di secondo livello ci permette di individuare tipi di situazioni problematiche per le quali si è registrata una crescita o una decrescita dell'abilità degli allievi in matematica. Si tratta di situazioni a cui la scuola sembra preparare adeguatamente, nel primo caso, mentre sono da promuovere maggiormente, nel secondo caso.

Nell'esempio analizzato, ci siamo focalizzati su una situazione problematica basata sul concetto di uguaglianza di due quantità come strumento (nel senso di Douady, 1986) per la quale sembra esserci una

[1] Nel modello di Rasch (1960), utilizzato da INVALSI, il parametro di difficoltà di ogni item della prova, "definito come il livello di abilità richiesto affinché un soggetto abbia le stesse probabilità di superare o non superare l'item" (Barbaranelli & Natali, 2005) è espresso sulla stessa scala delle stime dell'abilità degli studenti, in quanto esso corrisponde al punto sul *continuum* dell'abilità latente nel quale la probabilità di rispondere correttamente all'item è pari al 50%.

crescita delle competenze nel corso della scuola primaria (per la coorte 2004). Questo tipo di situazione permette di cogliere l'avvenuta acquisizione di una forma di ragionamento alla base di molti processi matematici di cui l'allievo si servirà in futuro, alla scuola secondaria di I e di II grado, quando dovrà impostare e risolvere un'equazione per affrontare problemi di tipo algebrico. Analizzare lo sviluppo di una tale predisposizione al ragionamento algebrico già dalla scuola primaria può rivelarsi utile in un'ottica di continuità con i gradi scolastici successivi.

Due ulteriori indagini possono confermare la nostra ipotesi di crescita delle competenze su questo tipo di situazione: in primo luogo, stiamo estendendo l'analisi ad altre coorti, cercando una situazione analoga su cui valutare l'evoluzione di questa competenza matematica; in secondo luogo, ipotizziamo di proseguire l'analisi sui dati delle varie coorti per seguire lo sviluppo di questa competenza al termine della scuola secondaria di I grado e, soprattutto, al secondo anno della scuola secondaria di II grado, dove l'algebra è ormai stata introdotta come strumento per risolvere situazioni di questo tipo.

Tra le prospettive future di questo studio, ci proponiamo, inoltre, di ampliare lo spettro delle situazioni analizzate longitudinalmente su più coorti. Nello specifico, intendiamo individuare e analizzare coppie di item simili su cui si registra un peggioramento delle performance degli allievi, nonostante il percorso svolto alla scuola primaria. Intendiamo infatti formulare delle implicazioni didattiche più complete e forti, individuando tipi di situazioni problematiche che, per struttura o per contenuto, dovrebbero essere oggetto di studio più approfondito già a partire dalla scuola primaria.

Vi è un'ulteriore parte del lavoro, già in corso da settembre 2017, che comporta studi di caso qualitativi. Così come abbiamo fatto per l'uguaglianza di due quantità, formuleremo delle ipotesi sulla base di un miglioramento o peggioramento delle performance degli allievi. Per testare queste ipotesi, è stato avviato un progetto-pilota in undici classi quinte di Torino per l'a.s. 2017/18. Questi studi di caso ci forniscono anche il contesto per studiare nel dettaglio l'evoluzione delle competenze degli alunni, avendo accesso alle loro risoluzioni, strategie, ragionamenti e argomentazioni. Ogni classe sarà seguita per tutto l'anno scolastico con proposte periodiche di attività di *problem solving*, preparate in collaborazione con l'insegnante in modo da seguire il programma in corso di svolgimento. Grande attenzione è data all'argomentazione, per stimolare la quale le attività sono proposte a coppie o in gruppo. Al termine dell'attività, i bambini rispondono individualmente a brevi quesiti (presi da prove INVALSI precedenti e inerenti all'attività svolta) per verificare gli apprendimenti in corso di acquisizione e la loro profondità. Anche in questo caso infatti il focus è sull'argomentazione, con domande del tipo "spiega come hai fatto" e "spiega perché". L'obiettivo generale di questo lavoro nelle classi è quello di seguire e sostenere lo sviluppo dei processi chiave di *problem solving* e accompagnare gli allievi ad affrontare con serenità e consapevolezza l’ultima tappa del percorso: la prova di quinta del 2018.

Alcuni risvolti dell’analisi quantitativa si potranno testare con le osservazioni in classe e, viceversa, l’analisi di strategie emerse dai bambini potrà alimentare l’analisi a priori di item simili. La definizione e i criteri che ci siamo dati per misurare l’evoluzione delle competenze non cambiano, anzi costituiscono il trait-d’union tra la parte più quantitativa dell’analisi e gli studi di caso nelle classi. Sono stati individuati i livelli di abilità degli studenti, coinvolti nel progetto, rilevati con la prova di seconda del 2015. Si è partiti proprio da questa prova, analizzandone con gli insegnanti i risultati e proponendo a inizio anno alcuni quesiti riadattati, per studiare l’evoluzione delle abilità degli studenti. Ci auguriamo di registrare un miglioramento, almeno per una parte degli studenti, che potrà essere rilevato con la prova di quinta di maggio 2018, confrontando i livelli di abilità raggiunti con quelli di partenza e l’andamento degli studenti su alcune coppie di quesiti simili.

Riferimenti bibliografici

AAVV. (2017) *Rilevazioni nazionali degli apprendimenti 2016-17 – Rapporto risultati*, http://www.invalsi.it/invalsi/doc_eventi/2017/Rapporto_Prove_INVALSI_2017.pdf

Barbaranelli, C., & Natali, E. (2005). *I test psicologici: teorie e modelli psicometrici.* Carocci.

Black, P., & Wiliam, D. (2009). Developing the theory of formative assessment. *Educational Assessment, Evaluation and Accountability*, 21(1), 5-31.

Boero, P. (1986). Sul problema dei problemi aritmetici nella scuola elementare. *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze integrate*, 9(9), 48-93.

Borasi, R. (1984). Che cos'è un problema? Considerazioni sul concetto di problema e sulle sue implicazioni in didattica della matematica. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 2(7), 83-98.

Branchetti, L., Ferretti, F., Lemmo, A., Maffia, A., Martignone, F., Matteucci, M., & Mignani, S. (2015). A longitudinal analysis of the Italian national standardized mathematics tests. In *Proceeding of CERME9*, 1695-1701.

Douady, R. (1986). Jeux de cadre et dialectique outil-objet, *Recherches en didactique des mathématiques*, 7 2), 5-32.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. In *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 5(1), 37-65.

Martignone, F. (2016). Un'attività di formazione per insegnanti di scuola secondaria di primo grado: analisi di prove Invalsi di matematica. *Form@re-Open Journal per la formazione in rete*, 16(1), 70-86.

Rasch, G. (1960). *Probabilistic models for some intelligence and attainment tests.* Chicago: The university of Chicago Press.

Rock, D.A., Pollack, J.M., & Weiss, M. (2004). *Assessing cognitive achievement growth during the kindergarten and first grade years* (ETS RR-04-22). Princeton, NJ: ETS.

Vergnaud, G. (1990). Théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*, 10, 47-56.

von Davier, A. A., Carstensen, C. H., & von Davier, M. (2006). Linking Competencies in Educational Settings and Measuring Growth. Research Report. *ETS RR-06-12. ETS Research Report Series.*

Zan, R. (2012). La dimensione narrativa di un problema: il modello C&D per l'analisi e la (ri)formulazione del testo. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 35(2), 108-126 e 35(4), 437-467.